

GRAFURI NEORIENTATE

1. Teoremă

Într-un graf $G = (X, U)$ cu n noduri, numărul total de grafuri neorientate care se pot forma cu aceste noduri este g :

$$2^{C_2^n} \text{ sau } 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

2. Definiție.

Gradul unui nod x al grafului G este egal cu numărul muchiilor incidente cu nodul x și se notează cu $d(x)$. Gradul unui nod x al grafului G este egal cu numărul muchiilor incidente cu nodul x și se notează cu $d(x)$.

3. Teoremă

Într-un graf $G = (X, U)$ cu n noduri și m muchii, suma gradelor tuturor nodurilor grafului este egală cu dublul numărului de muchii:

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2 \cdot m$$

4. Definiție

Un graf cu n noduri pentru care oricare două noduri sunt adiacente se numește graf complet cu n noduri și se notează K_n .

5. Teorema

Numărul m de muchii ale unui graf neorientat complet cu n noduri este:

$$m = n \cdot \frac{n-1}{2} \\ \text{sau} \\ m = C_n^2$$

6. Definiție

Un ciclu elementar al unui graf G care trece prin toate nodurile grafului se numește ciclu hamiltonian.

Un graf G care conține un ciclu hamiltonian se numește graf hamiltonian.

FORMULE GRAFURI

7. Teorema

Dacă G este un graf cu $n \geq 3$ vârfuri, astfel încât gradul oricărui nod x verifică inegalitatea:

$$d(x) \geq \frac{n}{2}, \text{ rezultă că } G \text{ este graf hamiltonian.}$$

8. Definitie

Un ciclu al unui graf G care conține toate muchiile grafului se numește ciclu eulerian.

Un graf G care conține un ciclu eulerian se numește graf eulerian.

9. Teorema

Un graf fără noduri izolate este eulerian, dacă și numai dacă există un lanț între oricare două noduri, și gradele tuturor nodurilor sunt numere pare.

Graf conex

Definiție

Un graf G se numește **conex** dacă pentru orice pereche de noduri (x, y) cu $x \neq y$, există un lanț de la x la y .

Definiție

Se numește **componentă conexă** C a grafului G , un subgraf conex al lui G , care este maximal în raport cu această proprietate. Cu alte cuvinte nu există niciun lanț al lui G care să unească un nod din C cu un nod care nu aparține lui C .

Un graf conex are o singură componentă conexă, care cuprinde toate nodurile grafului.

Teoremă

Numărul minim de muchii necesar ca un graf neorientat, cu n noduri, să fie conex este $n-1$.

Un graf neorientat conex cu n noduri și $n-1$ muchii este aciclic (nu conține cicluri).

GRAFURI ORIENTATE

Teoremă

Într-un graf $G=(X,U)$ cu n vârfuri, **numărul total de grafuri orientate care se pot forma cu aceste noduri este g :**

$$g = 4^n \text{ sau } g = 4^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

FORMULE GRAFURI

2. Gradul unui vârf

Gradul unui vârf este caracterizat prin **gradul intern** și **gradul extern**.

Definiție

Gradul intern al unui vârf x al grafului G este egal cu numărul arcelor care intră în vârful x și se notează cu $d^-(x)$.

Definiție

Gradul extern al unui vârf x al grafului G este egal cu numărul arcelor care ies din vârful x și se notează cu $d^+(x)$.

Teoremă

Într-un graf $G=(X,U)$ cu n vârfuri și m arce, **suma gradelor interne ale tuturor vârfurilor este egală cu suma gradelor externe ale tuturor vârfurilor și este egală cu numărul de arce:**

$$\sum_{i=1}^n d^-(x_i) = \sum_{i=1}^n d^+(x_i) = m$$

6. Graf parțial

Definiție

Fie graful $G=(X,U)$ și mulțimea $V \subseteq U$. Graful $G'=(X,V)$ se numește **graf parțial** al grafului G .

Un **graf parțial** al grafului G este chiar graful G sau se obține din G păstrând toate vârfurile și eliminând niște arce.

Teoremă

Numărul de grafuri parțiale ale unui graf cu m arce este egal cu 2^m .

7. Subgraf

Definiție

Fie graful $G=(X,U)$. Graful $G'=(Y,V)$ se numește **subgraf** al grafului G dacă $Y \subseteq X$ și arcele din mulțimea V sunt toate arcele din mulțimea U care au ambele extremități în mulțimea Y .

Un **subgraf** al grafului G este chiar graful G sau se obține din G eliminând niște vârfuri și păstrând doar acele arce care au ambele extremități în mulțimea vârfurilor rămase.

Teoremă

Numărul de subgrafuri ale unui graf cu n vârfuri este egal cu $2^n - 1$.

FORMULE GRAFURI

a. Graf complet

Definiție

Un graf cu n vârfuri pentru care oricare două vârfuri sunt adiacente se numește **graf complet** cu n vârfuri și se notează K_n .

Se pot construi mai multe grafuri orientat complete cu n vârfuri, deoarece două vârfuri, x și y pot fi adiacente în trei situații: există arcul $[x, y]$, există arcul $[y, x]$ sau există arcele $[x, y]$ și $[y, x]$.

Teoremă

Numărul de grafuri orientat complete care se pot construi cu n vârfuri este:

$$3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

IV. Arbori

1. Terminologie

Definiție

Se numește **arbore**, un graf neorientat conex și fără cicluri.

Teoremă

Fie G un graf neorientat cu n noduri. G este arbore dacă și numai dacă are $n-1$ muchii și nu conține cicluri.